Linguagens Formais e Autômatos

Prova final — 07/07/2008
Prof. Marcus Vinícius Midena Ramos
Engenharia de Computação — UNIVASF

1. (1 ponto) Considere a linguagem $L \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, definida informalmente como segue. Se $w \in L$, então:

   - Para cada símbolo a presente na cadeia w, deverá existir uma subcadeia bbb situada imediatamente à direita do mesmo;
   - Para cada símbolo c presente na cadeia w, a subcadeia situada imediatamente à direita do mesmo deverá ser diferente de bbb;

   São exemplos de sentenças pertencentes a L: cbb, $abbbcabbb$, $bbabbbcbb$. Pede-se:

   (a) (0.5 ponto) Um autômato finito que reconheça L;
   $F = \{q_0, q_4, q_5, q_6\}$ e $\delta =$

$$\left\{ \begin{array}{llll} (q_0, a) \to q_1, & (q_0, b) \to q_0, & (q_0, c) \to q_4, & (q_0, d) \to q_0, \\ & (q_1, b) \to q_2, & & \\ & (q_2, b) \to q_3, & & \\ & (q_3, b) \to q_0, & & \\ (q_4, a) \to q_1, & (q_4, b) \to q_5, & (q_4, c) \to q_4, & (q_4, d) \to q_0, \\ (q_5, a) \to q_1, & (q_5, b) \to q_6, & (q_5, c) \to q_4, & (q_5, d) \to q_0, \\ (q_6, a) \to q_1, & & (q_6, c) \to q_4, & (q_6, d) \to q_0 \end{array} \right\}$$

   (b) (0.5 ponto) Uma gramática linear à direita que gere L.

$$\left\{ \begin{array}{llll} q_0 \to aq_1, & q_0 \to bq_0, & q_0 \to cq_4, & q_0 \to dq_0, q_0 \to \epsilon, \\ & q_1 \to bq_2, & & \\ & q_2 \to bq_3, & & \\ & q_3 \to bq_0, & & \\ q_4 \to aq_1, & q_4 \to bq_5, & q_4 \to cq_4, & q_4 \to dq_0, q_4 \to \epsilon, \\ q_5 \to aq_1, & q_5 \to bq_6, & q_5 \to cq_4, & q_5 \to dq_0, q_5 \to \epsilon, \\ q_6 \to aq_1, & & q_6 \to cq_4, & q_6 \to dq_0, q_6 \to \epsilon \end{array} \right\}$$

2. (1 ponto) Obtenha um autômato finito determinístico, sem transições em vazio e mínimo que reconheça a linguagem $a^*b^*a^*b^*$.

$F = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ e $\delta =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (q_0, a) \rightarrow q_0, & (q_0, b) \rightarrow q_1, \\ (q_1, a) \rightarrow q_2, & (q_1, b) \rightarrow q_1, \\ (q_2, a) \rightarrow q_2, & (q_2, b) \rightarrow q_3, \\ & (q_3, b) \rightarrow q_3 \end{array} \right\}$$

3. (1 ponto) Considere a linguagem $L = \{w = a^i(b^j \big| c^k)$, tal que (i) $\big|w\big| > 1000$; (ii) $i \neq 3$; (iii) j é múltiplo de 4; (iv) $k \leq 500\}$. Pergunta-se:

   (a) (0.5 ponto) L é regular?

   Sim. Considere-se as linguagens regulares a seguir:

   - $L_1 = aaa$
   - $L_2 = (bbbb)^*$
   - $L_3 = c^0 \mid c^1 \mid ... \mid c^{499}$
   - $L_4 = (a \mid b \mid c)^{1001}(a \mid b \mid c)^*$

   A linguagem L pode ser escrita como $L = (L_1'(L_2 \big| L_3)) \cap L_4$. Como a classe das linguagens regulares é fechada em relação às operações de complementação, união, concatenação e intersecção, segue que L é regular.

   (b) (0.5 ponto) L é sensível ao contexto?

   Sim, pois toda linguagem regular é também sensível ao contexto.

   Justifique as suas respostas.

4. (1 ponto) Considere as linguagens de entrada L_E e de saída L_S definidas a seguir.

   - $L_E = \{a, b, c\}^*$;
   - $L_S \subseteq \{a, b, c, 3, 4, 5\}^*$.

   Obtenha um transdutor finito que efetue o mapeamento de $w \in L_E$ para $w' \in L_S$, de tal forma que w' seja uma representação compacta da cadeia w, conforme o seguinte critério: toda subcadeia presente na cadeia de entrada w que contenha três, quatro ou cinco símbolos repetidos em seqüência deverá ser substituída, na cadeia de saída w', pela subcadeia correspondente formada pelo símbolo que se repete e o número 3, 4 ou 5. São exemplos de transdução: $\epsilon \rightarrow \epsilon$, $a \rightarrow a$, $cccc \rightarrow c4$, $abca \rightarrow abca$, $ccccccccb \rightarrow c5c3b$ e $aaaabcaaabb \rightarrow a4bca3bb$.

$F = \{q_0, q_{13}\}$ e $\delta =$

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
(q_0, a) \rightarrow (q_1, \epsilon), & (q_1, a) \rightarrow (q_2, \epsilon), & (q_2, a) \rightarrow (q_3, \epsilon), \\
(q_3, a) \rightarrow (q_4, \epsilon), & (q_4, a) \rightarrow (q_0, a5), & \\
(q_0, b) \rightarrow (q_5, \epsilon), & (q_5, b) \rightarrow (q_6, \epsilon), & (q_6, b) \rightarrow (q_7, \epsilon), \\
(q_7, b) \rightarrow (q_8, \epsilon), & (q_8, b) \rightarrow (q_0, b5), & \\
(q_0, c) \rightarrow (q_9, \epsilon), & (q_9, c) \rightarrow (q_{10}, \epsilon), & (q_{10}, c) \rightarrow (q_{11}, \epsilon), \\
(q_{11}, c) \rightarrow (q_{12}, \epsilon), & (q_{12}, c) \rightarrow (q_0, c5), & \\
\hline
(q_1, b) \rightarrow (q_5, a), & (q_1, c) \rightarrow (q_9, a), & \\
(q_2, b) \rightarrow (q_5, aa), & (q_2, c) \rightarrow (q_9, aa), & \\
(q_3, b) \rightarrow (q_5, a3), & (q_3, c) \rightarrow (q_9, a3), & \\
(q_4, b) \rightarrow (q_5, a4), & (q_4, c) \rightarrow (q_9, a4), & \\
\hline
(q_5, a) \rightarrow (q_1, b), & (q_5, c) \rightarrow (q_9, b), & \\
(q_6, a) \rightarrow (q_1, b), & (q_6, c) \rightarrow (q_9, bb), & \\
(q_7, a) \rightarrow (q_1, b3), & (q_7, c) \rightarrow (q_9, b3), & \\
(q_8, a) \rightarrow (q_1, b4), & (q_8, c) \rightarrow (q_9, b4), & \\
\hline
(q_9, a) \rightarrow (q_1, c), & (q_9, b) \rightarrow (q_5, c), & \\
(q_{10}, a) \rightarrow (q_1, cc), & (q_{10}, b) \rightarrow (q_5, cc), & \\
(q_{11}, a) \rightarrow (q_1, c3), & (q_{11}, b) \rightarrow (q_5, c3), & \\
(q_{12}, a) \rightarrow (q_1, c4), & (q_{12}, b) \rightarrow (q_5, c4), & \\
\hline
(q_1, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, a), & (q_2, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, aa), & \\
(q_3, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, a3), & (q_4, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, a4), & \\
(q_5, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, b), & (q_6, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, bb), & \\
(q_7, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, b3), & (q_8, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, b4), & \\
(q_9, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, c), & (q_{10}, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, cc), & \\
(q_{11}, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, c3), & (q_{14}, \epsilon) \rightarrow (q_{13}, c4) &
\end{array}
\right\}
$$

5. (1 ponto) O autômato $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{(q_0, a) \rightarrow q_0, (q_0, b) \rightarrow q_1, (q_1, c) \rightarrow q_2, (q_2, c) \rightarrow q_2, (q_2, a) \rightarrow q_0\}, q_0, \{q_0, q_2\})$ reconhece uma linguagem infinita e é tal que $a \in L(M)$. Essa sentença pode ser dividida em três partes $x = \epsilon, y = a, z = \epsilon$, de forma que as cadeias $xy^iz, i \geq 0$, também pertencem a L. Justifique esse fato, uma vez que a sentença escolhida possui comprimento $(|a| = 1)$ inferior ao mínimo exigido pelo Pumping Lemma para as linguagens regulares (no caso do autômato apresentado, $n = 3$).

   O "Pumping Lemma" estabelece uma propriedade que é verificada obrigatoriamente para toda cadeia $w \in L$, tal que $|w| \geq n$. Se, entretanto, a cadeia considerada tiver comprimento inferior a n, a propriedade pode ou não ser verificada, dependendo da existência e da localização do(s) ciclo(s) no autômato finito analisado. Nesse exemplo, o ciclo pode ser percorrido com a cadeia de entrada de comprimento unitário a, e isso é suficiente para provar a existência de infinitas outras cadeias que também pertencem a linguagem, conforme o enunciado do "Pumping Lemma".

6. (2 pontos) Conceitue:

   (a) (0.5 ponto) Configuração inicial (autômato de pilha);

   Tripla ordenada $(q_0, w, Z_0) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, onde q_0 é o estado inicial, w é a cadeia de entrada a ser analisada e Z_0 é o símbolo inicial da pilha.

   (b) (0.5 ponto) Configuração final (autômato de pilha);

   - Estado final: $(q_f, \epsilon, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, onde q_f é um estado final, a cadeia de entrada está esgotada e o conteúdo da pilha $\gamma \in \Gamma^*$ é irrelevante.
   - Pilha vazia: $(q, \epsilon, \epsilon) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, onde q é um estado qualquer, a cadeia de entrada está esgotada e a pilha está vazia.

   (c) (0.5 ponto) Configuração inicial (Máquina de Turing com fita limitada);

   Tripla ordenada $(<, q_0, w)$, onde q_0 é o estado inicial, "$<$" é a parte da cadeia de entrada situada à esquerda do cursor e w é a cadeia de entrada a ser analisada (situada à direita do cursor).

   (d) (0.5 ponto) Configuração final (Máquina de Turing com fita limitada).

   Tripla ordenada (α, q_f, β), onde q_f é um estado final, α é a parte da cadeia de entrada situada à esquerda do cursor e β é a parte da cadeia de entrada situada à direita do cursor.

7. (1 ponto) Considere a linguagem $L = \{(aa)^i(bbb)^i, i \geq 1\}$. Obtenha:

   (a) (0.5 ponto) Um autômato de pilha M <u>determinístico</u> que reconheça L;

$F = \varnothing$ (critério pilha vazia), e $\delta =$

$$\left\{\begin{array}{ll} (q_0, a, Z_0) \to (q_1, X), & (q_0, a, X) \to (q_1, XX), \\ (q_0, b, X) \to (q_2, X), & \\ (q_1, a, X) \to (q_0, X), & \\ (q_2, b, X) \to (q_3, X), & \\ (q_3, b, X) \to (q_4, \epsilon), & \\ (q_4, b, X) \to (q_5, X), & \\ (q_5, b, X) \to (q_6, X), & \\ (q_6, b, X) \to (q_4, \epsilon) & \end{array}\right\}$$

(b) (0.5 ponto) A seqüência de movimentações de M para a cadeia $aabbb$.

$(q_0, aabbb, Z_0) \vdash (q_1, abbb, X) \vdash (q_0, bbb, X) \vdash (q_2, bb, X) \vdash (q_3, b, X) \vdash (q_4, \epsilon, \epsilon)$

8. (2 pontos) Conceitue:

(a) (0.5 ponto) Linguagem livre de contexto e não-regular;

Aquela que é aceita por algum autômato de pilha mas não é aceita por nenhum autômato finito.

(b) (0.5 ponto) Linguagem sensível ao contexto e não-livre de contexto;

Aquela que é aceita por alguma Máquina de Turing com fita limitada mas não é aceita por nenhum autômato de pilha.

(c) (0.5 ponto) Linguagem recursiva e não-sensível ao contexto;

Aquela que é aceita por alguma Máquina de Turing que sempre pára mas não é aceita por nenhuma Máquina de Turing com fita limitada.

(d) (0.5 ponto) Linguagem recursivamente enumerável e não-recursiva.

Aquela que é aceita por alguma Máquina de Turing mas não é aceita por nenhuma Máquina de Turing que sempre pára.